Matematika Diskret Dasar: Kombinatorika

Tim Olimpiade Komputer Indonesia

Pendahuluan

Melalui dokumen ini, kita akan:

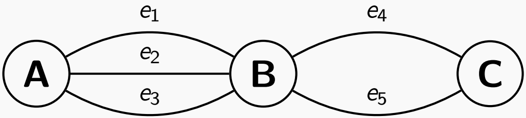
- Mempelajari **aturan perkalian**, **penjumlahan**, dan **pembagian**.
- Mempelajari **permutasi**.
- Mempelajari **kombinasi**.
- Memahami **segitiga pascal**.

Bagian 1

Aturan Perkalian dan Aturan Penjumlahan

Contoh Soal 1

- Terdapat 3 buah kota yaitu A, B, dan C.
- Kota A dan kota B terhubung oleh 3 jalur berbeda yaitu e_1, e_2, dan e_3.
- Sedangkan kota B dan kota C terhubung oleh 2 jalur berbeda yaitu e_4 dan e_5.
- Berapa banyak cara berbeda untuk menuju kota C dari kota A?
- Ilustrasi:



Solusi Awal

- Apabila kita hitung satu per satu, maka cara yang berbeda untuk menuju kota C dari kota A adalah sebagai berikut:
  - Melalui jalur e_1 kemudian jalur e_4
  - Melalui jalur e_1 kemudian jalur e_5
  - Melalui jalur e_2 kemudian jalur e_4
  - Melalui jalur e_2 kemudian jalur e_5
  - Melalui jalur e_3 kemudian jalur e_4
  - Melalui jalur e_3 kemudian jalur e_5
- Dengan kata lain, terdapat 6 cara berbeda untuk menuju kota C dari kota A.
- Tetapi, apabila jumlah kota dan jalur yang ada sangatlah banyak, kita tidak mungkin menulis satu per satu cara yang berbeda. Karena itulah kita gunakan **aturan perkalian**.

Aturan Perkalian

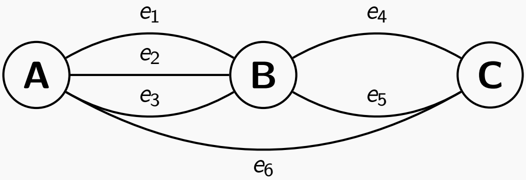
- Misalkan suatu proses dapat dibagi menjadi N subproses independen yang mana terdapat a_i cara untuk menyelesaikan subproses ke-i.
- Banyak cara yang berbeda untuk menyelesaikan proses tersebut adalah $a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_i$.

Solusi dengan Aturan Perkalian

- Anggaplah bahwa perjalanan dari kota A menuju kota B merupakan subproses pertama, yang mana terdapat 3 cara untuk menyelesaikan subproses tersebut.
- Anggaplah pula bahwa perjalanan dari kota B menuju kota C merupakan subproses kedua, yang mana terdapat 2 cara untuk menyelesaikan subproses tersebut.
- Karena perjalanan dari kota A menuju kota B dan dari kota B menuju kota C merupakan 2 subproses yang berbeda, maka kita dapat menggunakan aturan perkalian.
- Banyak cara berbeda dari kota A menuju kota C adalah $3 \times 2 = 6$.

Contoh Soal 2

- Contoh soal ini merupakan lanjutan dari Contoh Soal 1.
- Deskripsi soal, jumlah kota dan jalur serta susunan jalur yang ada sama persis dengan soal tersebut.
- Tambahkan 1 jalur lagi, yaitu e_6 yang menghubungkan kota A dan C.
- Berapa banyak cara berbeda untuk menuju kota C dari kota A?
- Ilustrasi:



Analisis Contoh Soal

- Dengan mencoba satu persatu setiap cara, maka terdapat 7 cara yang berbeda, yaitu 6 cara sesuai dengan soal sebelumnya, ditambah dengan menggunakan jalur e_6.
- Apabila kita menggunakan aturan perkalian, maka didapatkan banyak cara yang berbeda adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ yang mana jawaban tersebut tidaklah tepat.
- Kita tidak dapat menggunakan aturan perkalian dalam permasalahan ini, karena antara perjalanan dari kota A menuju kota C melalui kota B dengan tanpa melalui kota B merupakan 2 proses yang berbeda.
- Oleh karena itu, kita dapat menggunakan **aturan penjumlahan**.

Aturan Penjumlahan

- Misalkan suatu proses dapat dibagi menjadi N himpunan proses berbeda yaitu $H_1, H_2, H_3, ..., H_N$ dengan setiap himpunannya saling lepas (tidak beririsan).
- Banyak cara yang berbeda untuk menyelesaikan proses tersebut adalah $|H_1| + |H_2| + |H_3| + ... + |H_N|$ dengan $|H_i|$ merupakan banyaknya cara berbeda untuk menyelesaikan proses ke-i.

Solusi dengan Aturan Penjumlahan

- Proses perjalanan dari kota A menuju kota C dapat kita bagi menjadi 2 himpunan proses yang berbeda, yaitu dari kota A menuju kota C melalui kota B, dan dari kota A langsung menuju kota C.
- Banyak cara dari kota A menuju kota C melalui kota B dapat kita dapatkan dengan aturan perkalian seperti yang dibahas pada permasalahan sebelumnya, yaitu 6 cara berbeda.
- Banyak cara dari kota A langsung menuju kota C adalah 1 cara, yaitu melalui jalur e_6.
- Dengan aturan penjumlahan, banyak cara berbeda dari kota A menuju kota C adalah $6 + 1 = 7$ cara berbeda.

Hati-Hati!

- Apabila terdapat irisan dari himpunan proses tersebut, maka solusi yang kita dapatkan dengan aturan penjumlahan menjadi tidak tepat, karena ada solusi yang terhitung lebih dari sekali.
- Agar solusi tersebut menjadi tepat, gunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi pada Teori Himpunan.

Bagian 2

Permutasi

Perkenalan Permutasi

- Permutasi adalah pemilihan urutan beberapa elemen dari suatu himpunan.
- Untuk menyelesaikan soal-soal permutasi, dibutuhkan pemahaman konsep faktorial.

Notasi Faktorial

- Faktorial dari N ($N!$) merupakan hasil perkalian dari semua bilangan asli kurang dari atau sama dengan N.
- $N! = N \times (N-1) \times (N-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$, dengan $0! = 1$.
- Contoh: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Aturan Pembagian

- **Aturan pembagian** terkadang disebut juga sebagai redundansi.
- Apabila terdapat K susunan cara berbeda yang kita anggap merupakan 1 cara yang sama, maka kita dapat membagi total keseluruhan cara dengan K, sehingga K cara tersebut dianggap sama sebagai 1 cara.

Contoh Aturan Pembagian

- Banyak kata berbeda yang disusun dari huruf-huruf penyusun "TOKI" adalah 4! (menggunakan aturan perkalian).
- Apabila kita ganti soal tersebut, yaitu kata berbeda yang disusun dari huruf-huruf penyusun "BACA", solusi 4! merupakan solusi yang salah.
- Sebab, terdapat 2 buah huruf 'A'. Sebagai contoh: BA_1CA_2 dan BA_2CA_1 pada dasarnya merupakan kata yang sama.

Contoh Aturan Pembagian (lanj.)

- Terdapat 2! cara berbeda tetapi yang kita anggap sama, yaitu penggunaan A_1A_2 dan A_2A_1.
- Sehingga banyak kata berbeda yang dapat kita bentuk dari huruf-huruf penyusun kata "BACA" adalah $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$ kata berbeda.

Contoh Soal 1

- Terdapat 5 anak (sebut saja A, B, C, D, dan E) yang sedang mengikuti sebuah kompetisi.
- Dalam kompetisi tersebut akan diambil 3 peserta sebagai pemenang.
- Berapa banyak susunan pemenang yang berbeda dari kelima orang tersebut?

Solusi Awal

- Anggap bahwa kita mengambil semua anak sebagai pemenang, sehingga terdapat $5! = 120$ susunan pemenang yang berbeda (ABCDE, ABCED, ABDCE, ..., EDCBA).
- Apabila kita hanya mengambil 3 peserta saja, perhatikan bahwa terdapat 2 cara berbeda yang kita anggap sama. Contoh: (ABC)DE dan (ABC)ED merupakan cara yang sama, karena 3 peserta yang menang adalah A, B, dan C.
- Dengan menggunakan aturan pembagian, maka banyak susunan pemenang yang berbeda adalah $\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$ susunan berbeda.

Solusi Secara Umum

- Apabila terdapat N anak, dan kita mengambil semua anak sebagai pemenang, maka terdapat $N!$ susunan cara berbeda.
- Tetapi apabila kita hanya mengambil R anak saja, maka akan terdapat $(N - R)!$ susunan berbeda yang kita anggap sama.
- Secara umum dengan aturan pembagian, banyak susunan berbeda adalah $\frac{N!}{(N-R)!}$.
- Inilah yang kita kenal dengan istilah **permutasi**.

Permutasi

- Misalkan terdapat n objek dan kita akan mengambil r objek dari n objek tersebut yang mana $r < n$ dan urutan pengambilan diperhitungkan.
- Banyak cara pengambilan yang berbeda adalah permutasi r terhadap n:
- $P(n, r) =_n P_r = P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Contoh Soal 2

- Contoh soal ini sejenis dengan contoh pada aturan pembagian.
- Berapa banyak kata berbeda yang disusun dari huruf-huruf penyusun kata "MEGAGIGA"?

Solusi Awal

- Terdapat 8 huruf, sehingga banyak kata yang dapat disusun adalah 8!.
- Terdapat 3 huruf 'G' sehingga terdapat 6 kata berbeda yang kita anggap sama ($G_1 G_2 G_3$, $G_1 G_3 G_2$, ..., $G_3 G_2 G_1$).
- Dengan aturan pembagian, maka banyak kata yang dapat disusun mengingat kesamaan kata pada huruf G adalah $\frac{8!}{3!}$.
- Perlu kita perhatikan pula bahwa terdapat 2 huruf A, sehingga dengan cara yang sama akan didapatkan banyak kata yang berbeda adalah $\frac{8!}{(3! \times 2!)}$.

Solusi Secara Umum

- Terdapat N huruf, sehingga banyak kata yang dapat kita susun adalah $N!$.
- Apabila terdapat K huruf dengan setiap hurufnya memiliki R_i huruf yang sama, maka dengan aturan pembagian banyak kata berbeda yang dapat disusun adalah $\frac{N!}{(R_1! \times R_2! \times R_3! \times ... \times R_K!)}$.
- Inilah yang kita kenal dengan **permutasi elemen berulang**.

Permutasi Elemen Berulang

- Misalkan terdapat n objek dan terdapat k objek yang mana setiap objeknya memiliki r_i elemen yang berulang, maka banyaknya cara berbeda dalam menyusun objek tersebut adalah:
- $P^{n}_{r_1,r_2,r_3,\ldots,r_k} = \frac{n!}{(r_1! \times r_2! \times r_3! \times \ldots \times r_k!)}$

Contoh Soal 3

- Terdapat 4 anak, sebut saja A, B, C, dan D.
- Berapa banyak susunan posisi duduk yang berbeda apabila mereka duduk melingkar?

Solusi Awal

- Banyak susunan posisi duduk yang berbeda apabila mereka duduk seperti biasa (tidak melingkar) adalah $4! = 120$.
- Perhatikan bahwa posisi duduk ABCD, BCDA, CDAB, dan DABC merupakan susunan yang sama apabila mereka duduk melingkar, karena susunan tersebut merupakan rotasi dari susunan yang lainnya.
- Dengan kata lain terdapat 4 cara berbeda yang kita anggap sama.
- Dengan aturan pembagian, banyak susunan posisi duduk yang berbeda adalah $\frac{120}{4} = 30$ susunan berbeda.

Solusi Secara Umum

- Banyak susunan posisi duduk yang berbeda apabila N anak seperti biasa (tidak melingkar) adalah $N!$.
- Dengan analisis yang sama, akan terdapat N cara berbeda yang kita anggap sama.
- Dengan aturan pembagian, banyak susunan posisi duduk yang berbeda adalah $\frac{N!}{N} = (N-1)!$ susunan berbeda.
- inilah yang kita kenal dengan istilah **permutasi siklis**.

Permutasi Siklis

- Permutasi siklis adalah permutasi yang disusun melingkar.
- Banyaknya susunan yang berbeda dari permutasi siklis terhadap n objek adalah:
- $P^{n}_{(siklis)} = (n-1)!$

Bagian 3

Kombinasi

Contoh Soal 1

- Terdapat 5 anak (sebut saja A, B, C, D, dan E) yang mana akan dipilih 3 anak untuk mengikuti kompetisi.
- Berapa banyak susunan tim berbeda yang dapat dibentuk?

Solusi Awal

- Soal ini berbeda dengan permutasi, karena susunan ABC dan BAC merupakan susunan yang sama, yaitu 1 tim terdiri dari A, B, dan C.
- Apabila kita anggap bahwa mereka merupakan susunan yang berbeda, maka banyaknya susunan tim adalah $P_2^5 = \frac{120}{2} = 60$.
- Untuk setiap susunan yang terdiri dari anggota yang sama akan terhitung 6 susunan berbeda yang mana seharusnya hanya dihitung sebagai 1 susunan yang sama.
- Contoh: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA merupakan 1 susunan yang sama.
- Oleh karena itu dengan aturan pembagian, banyaknya susunan tim yang berbeda adalah $\frac{60}{6} = 10$ susunan berbeda.

Solusi Secara Umum

- Misalkan terdapat N anak dan akan kita ambil R anak untuk dibentuk sebagai 1 tim.
- Apabila urutan susunan diperhitungkan, maka banyaknya susunan tim adalah P_R^N.
- Setiap susunan yang terdiri dari anggota yang sama akan terhitung $R!$ susunan berbeda yang mana seharusnya hanya dihitung sebagai 1 susunan yang sama.
- Dengan aturan pembagian, banyaknya susunan tim yang berbeda adalah $\frac{P_R^N}{R!} = \frac{N!}{(N-R)! \times R!}$ susunan berbeda.
- Inilah yang kita kenal dengan istilah **kombinasi**.

Kombinasi

- Misalkan terdapat n objek dan kita akan mengambil r objek dari n objek tersebut dengan $r < n$ dan urutan pengambilan tidak diperhitungkan.
- Banyaknya cara pengambilan yang berbeda adalah kombinasi r terhadap n:
- $C(n, r) =_n C_r = C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$.

Contoh Soal 2

- Pak Dengklek ingin membeli kue pada toko kue yang menjual 3 jenis kue, yaitu rasa coklat, stroberi, dan kopi.
- Apabila Pak Dengklek ingin membeli 4 buah kue, maka berapa banyak kombinasi kue berbeda yang Pak Dengklek dapat beli?

Analisis Contoh Soal

- Perhatikan bahwa membeli coklat-stroberi dengan stroberi-coklat akan menghasilkan kombinasi yang sama.
- Contoh soal ini merupakan permasalahan kombinasi.
- Akan tetapi, kita dapat membeli suatu jenis kue beberapa kali atau bahkan tidak membeli sama sekali.
- Contoh soal ini dapat dimodelkan secara matematis menjadi mencari banyaknya kemungkinan nilai A, B, dan C yang memenuhi $A + B + C = 4$ dan $A, B, C \geq 0$.

Solusi

- Kita dapat membagi 4 kue tersebut menjadi 3 bagian. Untuk mempermudah ilustrasi tersebut, kita gunakan lambang o yang berarti kue, dan | yang berarti pembatas.
- Bagian kiri merupakan kue A, bagian tengah merupakan kue B, dan bagian kanan merupakan kue C.
- Contoh: (o|o|oo) menyatakan 1 kue A, 1 kue B, dan 2 kue C.
- Contoh lain: (oo|oo|) menyatakan 2 kue A, 2 kue B, dan 0 kue C.
- Dengan kata lain, semua susunan yang mungkin adalah (oooo||), (ooo|o|), (oo|oo|), ..., (||oooo) yang tidak lain merupakan $C^6_2 = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15$ susunan berbeda.

Solusi Secara Umum

- Kita ingin mencari banyaknya susunan nilai berbeda dari $X_1, X_2, X_3, ..., X_r$ yang mana $X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_r = n$.
- Untuk membagi n objek tersebut menjadi r bagian, maka akan dibutuhkan $r - 1$ buah pembatas, sehingga akan terdapat $n + r - 1$ buah objek, yang mana kita akan memilih $r - 1$ objek untuk menjadi simbol |.
- Dengan kata lain, banyaknya susunan nilai yang berbeda adalah C^{n+r-1}_{r-1}.
- Inilah yang kita kenal dengan istilah **kombinasi dengan perulangan**.

Kombinasi dengan Perulangan

- Misalkan terdapat r jenis objek dan kita akan mengambil n objek, dengan tiap jenisnya dapat diambil 0 atau beberapa kali.
- Banyaknya cara berbeda yang memenuhi syarat tersebut adalah sebagai berikut:
- $C_{n}^{n+r-1} = C_{r-1}^{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{n! \times (r-1)!}$

Bagian 4

Segitiga Pascal

Segitiga Pascal

- **Segitiga Pascal** merupakan susunan dari koefisien-koefisien binomial dalam bentuk segitiga.
- Nilai dari baris ke-n suku ke-r adalah C_r^n.
- Contoh Segitiga Pascal:
  - Baris ke-1: 1
  - Baris ke-2: 1 1
  - Baris ke-3: 1 2 1
  - Baris ke-4: 1 3 3 1
  - Baris ke-5: 1 4 6 4 1

Analisis

- Diberikan suatu himpunan $S = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Berapa banyak cara untuk memilih r objek dari S?
- Terdapat 2 kasus:
  - Kasus 1: X_n dipilih. Artinya, $r - 1$ objek harus dipilih dari himpunan $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_{n-1}\}$. Banyaknya cara berbeda dari kasus ini adalah C_{r-1}^{n-1}.
  - Kasus 2: X_n tidak dipilih. Artinya, r objek harus dipilih dari himpunan $\{X_1, X_2, X_3, ..., X_n\}$. Banyaknya cara berbeda dari kasus ini adalah C_r^{n-1}.

Analisis (lanj.)

- Dengan aturan penjumlahan dari kasus 1 dan kasus 2, kita dapatkan $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$.
- Persamaan itulah yang sering kita gunakan dalam membuat Segitiga Pascal, karena C_r^n juga menyatakan baris ke-n dan kolom ke-r pada Segitiga Pascal.

Analisis (lanj.)

- Dalam dunia pemrograman, kadang kala dibutuhkan perhitungan seluruh nilai C_r^n yang memenuhi $n \leq N$, untuk suatu N tertentu.
- Pencarian nilai dari C_r^n dengan menghitung faktorial memiliki kompleksitas $O(n)$.
- Apabila seluruh nilai kombinasi dicari dengan cara tersebut, kompleksitas akhirnya adalah $O(N^3)$.
- Namun, dengan menggunakan persamaan $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$, maka secara keseluruhan kompleksitasnya dapat menjadi $O(N^2)$.

Implementasi Segitiga Pascal (lanj.)

SEGITIGA_PASCAL(N)

```
// Sediakan array 2-dimensi C berukuran (N + 1) × (N + 1)
for i = 0 to N
    C[i][0] = 1
    for j = 0 to i − 1
        C[i][j] = C[i − 1][j − 1] + C[i − 1][j]
    C[i][i] = 1
```

Penggunaan Segitiga Pascal

- Dalam bidang matematika, Segitiga Pascal merupakan kumpulan dari koefisien binomial yang dapat digunakan dalam Binomial Newton $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r} y^r$ yang mana a_r merupakan bilangan dalam segitiga pascal baris ke-n suku ke-r.
- Dalam bidang programming, algoritma dari segitiga pascal dapat digunakan untuk mencari semua nilai dari kombinasi r terhadap n untuk seluruh $n \leq N$ dengan kompleksitas waktu $O(N^2)$ dan memori $O(N^2)$.

Penutup

- Materi ini berisi mengenai kombinatorika dasar dan implementasinya yang umum digunakan dalam pemrograman kompetitif.
- Dengan materi ini, Anda diharapkan dapat menggunakan konsep kombinatorika yang ada.