



# Matematika Diskret Dasar

Tim Olimpiade Komputer Indonesia

# Pendahuluan

Melalui dokumen ini, kalian akan:

- Mempelajari **aritmetika modular**.
- Mempelajari bilangan prima dan **uji keprimaan**.
- Mempelajari algoritma **prime generation**.
- Memahami FPB dan KPK.
- Mempelajari dan memanfaatkan **pigeonhole principle**.



# Matematika Diskret

- Merupakan cabang matematika yang mempelajari tentang sifat bilangan bulat, logika, kombinatorika, dan graf.



Bagian 1

# Aritmetika Modular



# Konsep Modulo

- Operasi  $a \bmod m$  biasa disebut " $a$  modulo  $m$ ".
- Operasi modulo ini akan memberikan sisa hasil bagi  $a$  oleh  $m$ .
- Contoh:
  - $5 \bmod 3 = 2$
  - $10 \bmod 2 = 0$
  - $21 \bmod 6 = 3$



## Sifat-Sifat Modulo

- $(A + B) \bmod M = ((A \bmod M) + (B \bmod M)) \bmod M$
- $(A - B) \bmod M = ((A \bmod M) - (B \bmod M)) \bmod M$
- $(A \times B) \bmod M = ((A \bmod M) \times (B \bmod M)) \bmod M$
- $(A^B) \bmod M = ((A \bmod M)^B) \bmod M$



# Aplikasi Modulo

- Pada pemrograman kompetitif, tidak jarang kita harus menghitung  $n! \bmod k$  (terutama dalam kombinatorika).
- Seandainya kita menghitung  $n!$ , kemudian menggunakan operasi mod, kemungkinan besar kita akan mendapatkan *integer overflow*.
- Untungnya, kita dapat memanfaatkan sifat modulo.



## Aplikasi Modulo (lanj.)

Solusi:

MODULARFACTORIAL( $n, k$ )

```
1  result = 1
2  for  $i = 1$  to  $n$ 
3      result = (result ×  $i$ ) mod  $k$ 
4  return result
```





# Hati-Hati!

- Aritmetika modular tidak serta-merta bekerja pada pembagian.
- $\frac{a}{b} \bmod n \neq \left(\frac{a \bmod n}{b \bmod n}\right) \bmod n$ .
- Contoh:  $\frac{12}{4} \bmod 6 \neq \left(\frac{12 \bmod 6}{4 \bmod 6}\right) \bmod 6$ .
- Pada aritmetika modular,  $\frac{a}{b} \bmod n$  biasa ditulis sebagai:

$$a \times b^{-1} \bmod n$$

dengan  $b^{-1}$  adalah **modular multiplicative inverse** dari  $b$ .

- Jika tertarik, Anda bisa mempelajari *modular multiplicative inverse* melalui [tautan Wikipedia ini](#).



Bagian 2

## Bilangan Prima



# Konsep Bilangan Prima

## Bilangan Prima

Bilangan bulat positif yang tepat memiliki dua faktor (pembagi), yaitu 1 dan dirinya sendiri.

Contoh: 2, 3, 5, 13, 97.

## Bilangan Komposit

Bilangan yang memiliki lebih dari dua faktor.

Contoh: 6, 14, 20, 25.



# Uji Keprimaan

- **Uji keprimaan** (*primality testing*) adalah algoritma untuk mengecek apakah suatu bilangan bulat  $N$  adalah bilangan prima.
- Kita dapat memanfaatkan sifat bilangan prima yang disebutkan pada slide sebelumnya untuk mengecek apakah suatu bilangan merupakan suatu bilangan prima.



## Uji Keprimaan (lanj.)

- Solusi yang mudah untuk mengecek apakah  $N$  prima atau tidak tentu dengan mengecek apakah ada bilangan selain 1 dan  $N$  yang habis membagi  $N$ .
- Maka, kita dapat melakukan iterasi dari 2 hingga  $N - 1$  untuk mengetahui apakah ada bilangan selain 1 dan  $N$  yang habis membagi  $N$ .
- Kompleksitas:  $O(N)$ .



## Uji Keprimaan (lanj.)

ISPRIMENAIVE( $n$ )

1 **if**  $n \leq 1$

2     **return** *false*

3 **for**  $i = 2$  **to**  $n - 1$

4     **if**  $n \bmod i == 0$

5         **return** *false*

6 **return** *true*



## Uji Keprimaan (lanj.)

- Ada solusi yang lebih cepat dari  $O(N)$ .
- Manfaatkan observasi bahwa jika  $N = a \times b$ , dan  $a \leq b$ , maka  $a \leq \sqrt{N}$  dan  $b \geq \sqrt{N}$ .
- Kita tidak perlu memeriksa  $b$ ; seandainya  $N$  habis dibagi  $b$ , tentu  $N$  habis dibagi  $a$ .
- Jadi kita hanya perlu memeriksa hingga  $\sqrt{N}$ .
- Kompleksitas:  $O(\sqrt{N})$



## Uji Keprimaan (lanj.)

ISPRIMESQRT( $n$ )

```
1  if  $n \leq 1$ 
2      return false

3   $i = 2$ 
4  while  $i \times i \leq n$ 
5      if  $n \bmod i == 0$ 
6          return false
7       $i = i + 1$ 

8  return true
```





## Bagian 3

# Prime Generation (Pembangkitan Bilangan Prima)



# Solusi Naif

- Misalkan kita ingin mengetahui himpunan bilangan prima yang tidak lebih dari  $N$ .
- Kita dapat membangkitkan bilangan prima dengan iterasi dan uji keprimaan.
- Solusi:
  1. Lakukan iterasi dari 2 sampai  $N$
  2. Untuk tiap bilangan, cek apakah dia bilangan prima. Jika ya, kita bisa memasukkannya ke daftar bilangan prima.



## Solusi Naif (lanj.)

SIMPLEPRIMEGENERATION( $N$ )

```
1  primeList = {}  
2  for  $i = 2$  to  $N$   
3      if ISPRIMESQRT( $i$ )  
4           $primeList = primeList \cup \{i\}$   
5  return primeList
```



# Sieve of Eratosthenes

- Terdapat solusi yang lebih cepat untuk membangkitkan bilangan prima, yaitu **Sieve of Eratosthenes**.
- Ide utama utama dari algoritma ini adalah mengeliminasi bilangan-bilangan dari calon bilangan prima.
- Yang akan kita eliminasi adalah bilangan komposit.



## Sieve of Eratosthenes (lanj.)

- Kita tahu bahwa suatu bilangan komposit  $c$  dapat dinyatakan sebagai  $c = p \times q$ , dengan  $p$  suatu bilangan prima.
- Seandainya kita mengetahui suatu bilangan prima, kita dapat mengeliminasi kelipatan-kelipatan bilangan tersebut dari calon bilangan prima.
- Contoh: jika diketahui 7 adalah bilangan prima, maka 14, 21, 28, ... dieliminasi dari calon bilangan prima.



# Prosedur Sieve of Eratosthenes

1. Awalnya seluruh bilangan bulat dari 2 hingga  $N$  belum dieliminasi.
2. Lakukan iterasi dari 2 hingga  $N$ :
  - 2.1 Jika bilangan ini belum dieliminasi, artinya bilangan ini merupakan bilangan prima.
  - 2.2 Lakukan iterasi untuk mengeliminasi kelipatan bilangan tersebut.



# Implementasi Sieve of Eratosthenes

- Kita dapat menggunakan *array boolean* untuk menyimpan informasi apakah suatu bilangan telah tereliminasi.
- Jika kita ingin mencari bilangan prima yang  $\leq N$ , maka diperlukan memori sebesar  $O(N)$ .
- Melalui perhitungan matematis, kompleksitas waktu solusi ini adalah  $O(N \log \log N)$ .



## Implementasi Sieve of Eratosthenes (lanj.)

SIEVEOFERATOSTHENES( $N$ )

```
1 // Siapkan array boolean eleminated berukuran  $N$ 
2 // Inisialisasi array eleminated dengan false
3 primeList = {}
4 for  $i = 2$  to  $n$ 
5     if not eleminated[ $i$ ]
6         primeList = primeList  $\cup$  { $i$ }
7          $j = i \times i$ 
8         while  $j \leq n$ 
9             eleminated[ $j$ ] = true
10             $j = j + i$ 
11 return primeList
```





## Implementasi Sieve of Eratosthenes (lanj.)

- Perhatikan baris ke-7 yang berisi  $j = i \times i$ .
- Di sini,  $j$  menyatakan kelipatan  $i$  yang akan dieliminasi.
- Perhatikan bahwa  $j$  dimulai dari  $i \times i$ , bukan  $2i$ .
- Alasannya adalah  $2i, 3i, 4i, \dots, (i - 1)i$  pasti sudah tereliminasi pada iterasi-iterasi sebelumnya.



## Bagian 4

# FPB dan KPK



# Faktorisasi Prima

- Ketika masih SD, kita pernah belajar memfaktorkan bilangan dengan pohon faktor.
- Melalui faktorisasi prima, kita dapat menyatakan suatu bilangan sebagai hasil perkalian faktor primanya.
- Contoh:  $7875 = 3^2 \times 5^3 \times 7$  .



## FPB dan KPK

- FPB dan KPK dapat dicari melalui faktorisasi prima.
- Untuk setiap bilangan prima, kita menggunakan pangkat terkecil untuk FPB dan pangkat terbesar untuk KPK.
- Contoh:
  - $4725 = 3^3 \times 5^2 \times 7$
  - $7875 = 3^2 \times 5^3 \times 7$
- Maka:
  - $FPB(4725, 7875) = 3^2 \times 5^2 \times 7 = 1525$
  - $KPK(4725, 7875) = 3^3 \times 5^3 \times 7 = 23625$
- Terdapat pula sifat  $KPK(a, b) = \frac{a \times b}{FPB(a, b)}$ .



# Algoritma Euclid

- Untuk mencari FPB suatu bilangan, menggunakan pohon faktor cukup merepotkan.
- Kita perlu mencari faktor prima bilangan tersebut, dan jika faktor primanya besar, tentu akan menghabiskan banyak waktu.
- Terdapat algoritma yang dapat mencari  $FPB(a, b)$  dalam  $O(\log(\min(a, b)))$ .
- Algoritma ini bernama **Algoritma Euclid**.



# Algoritma Euclid (lanj.)

EUCLID( $a, b$ )

1 **if**  $b == 0$

2     **return**  $a$

3 **else**

4     **return** EUCLID( $b, a \bmod b$ )



# Algoritma Euclid (lanj.)

- Sangat pendek!
- Anda dapat menghemat waktu pengetikan kode dalam melakukan pencarian FPB dengan algoritma ini.
- Jika Anda tertarik dengan pembuktiannya, baca lebih lanjut [di tautan Wikipedia ini](#).



## Bagian 5

# Pigeonhole Principle (PHP)





# Pigeonhole Principle

- Konsep PHP adalah " Jika ada  $N$  ekor burung dan  $M$  sangkar, yang memenuhi  $N > M$  , maka pasti ada sangkar yang berisi setidaknya 2 ekor burung".
- Secara matematis, jika ada  $N$  ekor burung dan  $M$  sangkar, maka pasti ada sangkar yang berisi setidaknya  $\lceil \frac{N}{M} \rceil$  ekor burung.



# Pigeonhole Principle (lanj.)

- Terkesan sederhana?
- Simak contoh aplikasi prinsip ini.



## Contoh Soal PHP

- Pak Dengklek memiliki sebuah *array*  $A$  berisi  $N$  bilangan bulat non-negatif.
- Anda ditantang untuk memilih angka-angka dari *array*-nya yang jika dijumlahkan habis dibagi  $N$ .
- Angka di suatu indeks *array* tidak boleh dipilih lebih dari sekali.
- Apabila mungkin, cetak indeks angka-angka yang Anda ambil.
- Apabila tidak mungkin, cetak "tidak mungkin".
- Batasan
  - $1 \leq N \leq 10^5$
  - *Array*  $A$  hanya berisi bilangan bulat non-negatif.



# Analisis Contoh Soal PHP

- Inti soal ini adalah mencari apakah pada *array* berukuran  $N$ , terdapat subhimpunan tidak kosong yang jumlahan elemen-elemennya habis dibagi  $N$ .



## Analisis Contoh Soal PHP (lanj.)

- Mari kita coba mengerjakan versi lebih mudah dari soal ini: Bagaimana jika yang diminta subbarisan, bukan subhimpunan?
- Anggap *array*  $A$  dimulai dari indeks 1 (*one-based*).
- Misalkan kita memiliki fungsi  $sum(k) = \sum_{i=1}^k A[i]$ .
- Untuk  $sum(0)$ , sesuai definisi nilainya adalah 0.



## Analisis Contoh Soal PHP (lanj.)

- Perhatikan bahwa  $\sum_{i=l}^r A[i] = \text{sum}(r) - \text{sum}(l - 1)$ .
- Jika subbarisan  $A[l..r]$  habis dibagi  $N$ , maka  $(\text{sum}(r) - \text{sum}(l - 1)) \bmod N = 0$ .
- Ini dapat kita tuliskan sebagai  $\text{sum}(r) \bmod N = \text{sum}(l - 1) \bmod N$ .



## Analisis Contoh Soal PHP (lanj.)

- Observasi 1:  
Ada  $N$  kemungkinan nilai  $(sum(x) \bmod N)$ , yaitu  $[0..N - 1]$ .
- Observasi 2:  
Ada  $N + 1$  nilai  $x$  untuk  $(sum(x) \bmod N)$ , yaitu untuk  $x \in [0..N]$ .

Ingat bahwa  $sum(0)$  ada agar jumlahan subbarisan  $A[1..k]$  untuk tiap  $k$  dapat kita nyatakan dalam bentuk:  
 $(sum(k) - sum(0))$ .



## Analisis Contoh Soal PHP (lanj.)

Observasi 3:

- Ada  $N + 1$  kemungkinan nilai  $x$
- Ada  $N$  kemungkinan nilai  $sum(x) \bmod N$
- **Pasti ada**  $a$  dan  $b$ , sehingga  
 $sum(b) \bmod N = sum(a) \bmod N$
- Subbarisan yang menjadi solusi adalah  $A[a + 1..b]$ .





## Analisis Contoh Soal PHP (lanj.)

- Dengan menyelesaikan versi mudah dari soal awal kita, ternyata kita justru dapat menyelesaikan soal tersebut.
- Suatu subbarisan dari  $A$  pasti juga merupakan subhimpunan dari  $A$ .
- Ternyata, **selalu** ada cara untuk menjawab pertanyaan Pak Dengklek.
- Yakni, keluaran "tidak mungkin" tidak akan pernah terjadi.



# Implementasi

FINDDIVISIBLESUBSEQUENCE( $A, N$ )

```
1 // Inisialisasi array  $sum[0..N]$  dengan 0
2 // Isikan nilai  $sum[i]$  dengan  $(A[1] + A[2] + \dots + A[i])$ 
3 // Inisialisasi array  $seenIndex[0..N - 1]$  dengan  $-1$ 

4 for  $i = 0$  to  $N$ 
5     if  $seenIndex[sum[i] \bmod N] == -1$ 
6          $seenIndex[sum[i] \bmod N] = i$ 
7     else
8          $a = seenIndex[sum[i] \bmod N]$ 
9          $b = i$ 
10    return  $[a + 1, a + 2, \dots, b]$ 
```



# Penutup

- Matematika diskret merupakan topik yang sangat luas.
- Topik ini berisikan banyak konsep dasar yang umum digunakan pada pemrograman kompetitif.

